2 Trigonometri

2.1 Innledning

Antall siffer som du vil skal inngå i beregninger bestemmes med Digits. Maple bruker 10 siffer som standard verdi

> *Digits* #standard verdi på antall siffer

$$10$$

- Pi er kommandoen for tallet π (Husk stor bokstav)

> Pi #skriver den eksakte verdien

$$\pi$$

> Pi ≠ pi #pi med liten p er bokstaven π

$$\pi \neq \pi$$

> *evalf*(%)

$$3.141592654 \neq \pi$$

>

Desimaltall heter på engelsk floating point (flyt-tall). For å få Maple til å regne med desimaltall må du enten skrive tallene som desimaltall eller bruke kommanden evalf.

- evalf(*talluttrykk*) skriver *talluttrykk* som et desimaltall (standard verdi er 10 siffer)

  evalf(*talluttrykk*, *n*) skriver talluttrykk som et desimaltall med *n* siffer.

> Pi = *evalf*(Pi)

$$\pi = 3.141592654$$

Med 100 siffer:

> *evalf*(Pi, 100)

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208\
998628034825342117068

2.2 Absolutte vinkelmål eller radianer

Maple har kommandoer (funksjoner) som regner om fra radianer til grader og motsatt.

- convert(*vinkel*, *degrees*) regner om *vinkel* i radianer til grader
- convert(*vinkel*, *radians*) regner om *vinkel* i grader til radianer

> $\frac{\mathrm{Pi}}{2} = convert\left(\frac{\mathrm{Pi}}{2}, degrees\right)$

$$\frac{\pi}{2} = 90\ degrees$$

> 45 *grader* = *convert*(45 *degrees*, *radians*)

$$45\ grader = \frac{\pi}{4}$$

Her er det ofte like greit å lage sine egne omregningsformler som funksjoner. Vi definerer formelen som regner om fra grader til radianer ved følgende funksjon:

> $r := n \mapsto \frac{\mathrm{Pi} \cdot n}{180}$

$$r := n \mapsto \frac{\pi \cdot n}{180}$$

Pilen er uttrykk for at r er en funksjon av n .

> $30\ grader = r(30)$

$$30\ grader = \frac{\pi}{6}$$

Tilsvarende for omregning fra radianer til grader, .

> $g := v \mapsto \frac{180 \cdot v}{\mathrm{Pi}}$

$$g := v \mapsto \frac{180 \cdot v}{\pi}$$

> $\frac{\mathrm{Pi}}{6} = g\left(\frac{\mathrm{Pi}}{6}\right)\ grader$

$$\frac{\pi}{6} = 30\ grader$$

2.3 Sinus, cosinus og tangens til vilkårlige vinkler

Eksempel 2.3.1

Tegn en enhetssirkel (radius = 1) og stråler som danner følgende vinkler med x-aksen.
a) 25, **b)** 125, **c)** -125, **e)** 270

Løsning

I programpakken plottools fins en kommando som plotter en sirkel.

- circle([*m*,*n*],*r*, *color* = *farge*) plotter en sirkel med sentrum i (m, n), radius r og angitt *farge*. Sirkelen må vises med display

Rette linjer kan plottes med den vanlige plottekommandoen.

- plot([*P*, *Q*], *color* = *farge*, *thickness* = *tykkelse*) forbinder punktene $P = [x_1, y_1]$ og $Q = [x_2, y_2]$ med en rett linje med angitt *farge* og *tykkelse*.

> $with(plottools) : with(plots) :$ *#kan kalles opp via en spesiell initialiseringsfil, maple.ini*

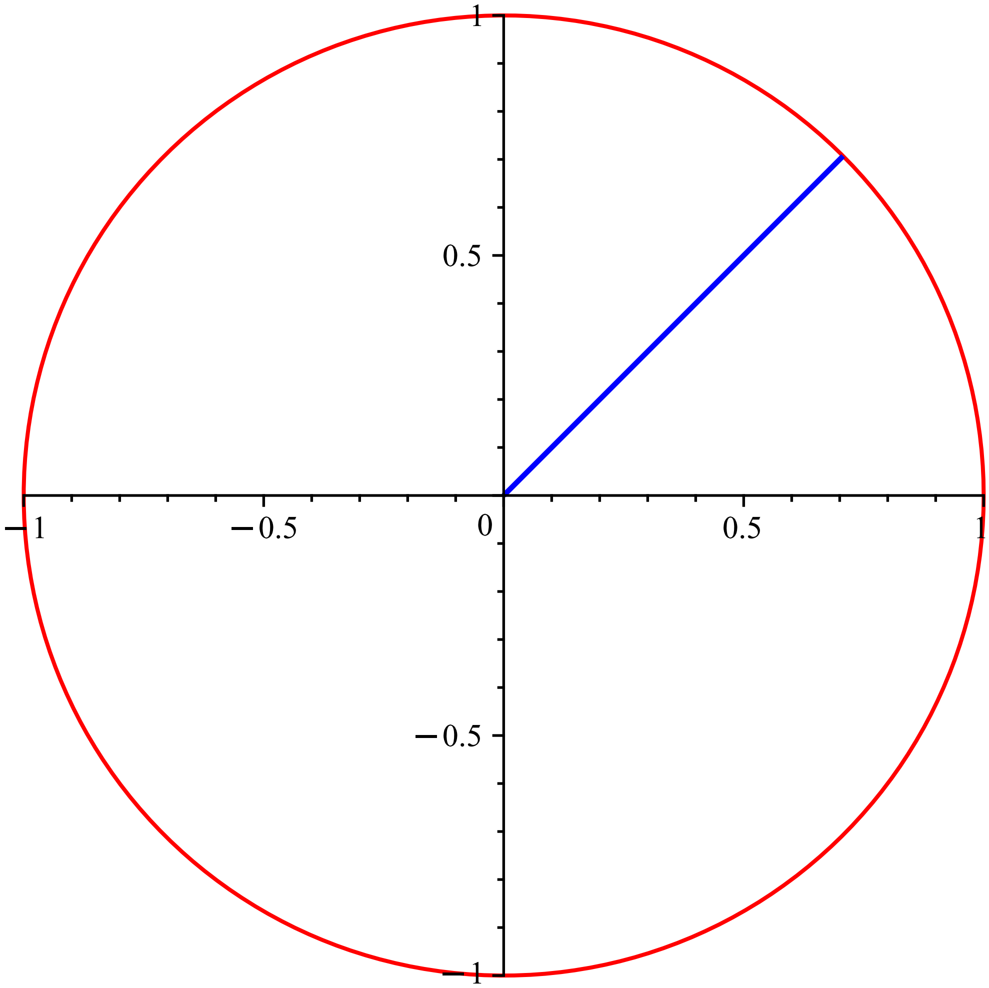
> $sirkel := circle([0, 0], 1, color = red) :$

Kommandoen må avsluttes med kolon for å unngå at Maple skriver ut alle punktene.
Siden vi skal plotte flere stråler med forskjellige vinkler, lønner det seg å lage en plottekommando som en funksjon av en vilkårlig vinkel . Det gjør vi ved hjelp av pil-definisjonen.

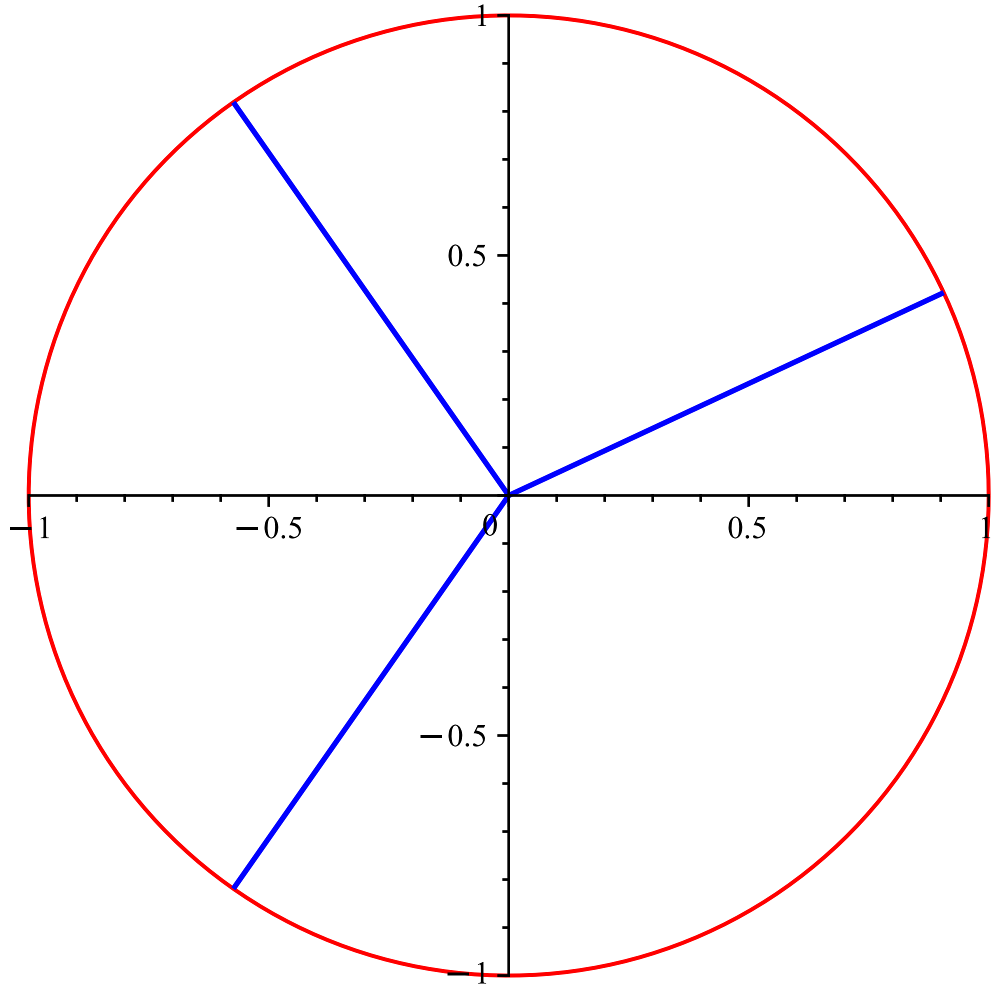
> $stråle := n \mapsto plot\left(\left[[0, 0], \left[\cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n}{180}\right), \sin\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n}{180}\right)\right]\right], color = blue, thickness = 2\right) :$

Så bruker vi display-kommandoen for å vise sirkelen med en eller flere stråler. *scaling=constrained* gjør at Maple bruker samme enheter på begge aksene

> $display(sirkel, stråle(45), scaling = constrained)$

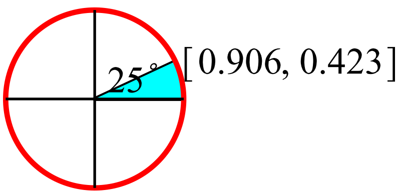


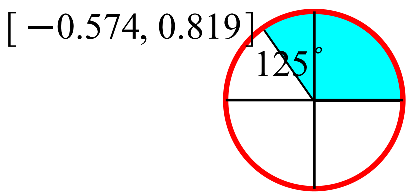
> $display(sirkel, stråle(25), stråle(125), stråle(-125), scaling = constrained)$

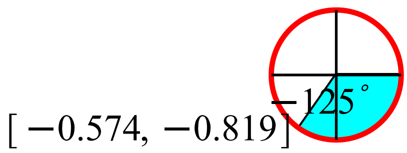


eller med EnhetsSirkel fra vgs-pakken.

> *EnhetsSirkel*(25) > *EnhetsSirkel*(125) > *EnhetsSirkel*(−125)







Sinus og cosinus til vinklene blir:

> $'\sin(25)' = evalf\left(\sin\left(\frac{25}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

> $'\cos(25)' = evalf\left(\cos\left(\frac{25}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

$$\sin(25) = 0.4226182618$$

$$\cos(25) = 0.9063077870$$

Ved bruk av sin, cos, tan og cot må vinklene være gitt i radianer. I vgs-pakken finnes Sin, Cos, Tan og Cot der vinklene må oppgis i grader.

> $'\sin(125)' = evalf\left(\sin\left(\frac{125}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

> $'\cos(125)' = evalf\left(\cos\left(\frac{125}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

$$\sin(125) = 0.8191520445$$

$$\cos(125) = -0.5735764361$$

>

> $Sin(125.)$

0.8191520437

> $Cos(-125.)$

-0.5735764372

> $Tan(60)$

$\sqrt{3}$

> $Cot(60)$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

> $'\sin(-125)' = evalf\left(\sin\left(-\frac{125}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

> $'\cos(-125)' = evalf\left(\cos\left(-\frac{125}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

$$\sin(-125) = -0.8191520445$$

$$\cos(-125) = -0.5735764361$$

> $'\sin(270)' = evalf\left(\sin\left(\frac{270}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

> $'\cos(270)' = evalf\left(\cos\left(\frac{270}{180}\,\mathrm{Pi}\right)\right)$

$$\sin(270) = -1.$$

$$\cos(270) = 0.$$

Legg merke til apostrofene rundt sinus og cosinus. De utsetter eller forhindrer utregningen eller evalueringen (i Maple-språket).

>

2.4 Trigonometriske formler

Maple hjelper oss med det meste av hva vi har bruk for av trigonometriske formler. To vinkler som til sammen er 90 grader kalles komplementærvinkler.

> $restart:$

> $'\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \sin(v)$$

> $'\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos(v)$$

> $'\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cot(v)$$

To vinkler som til sammen er 180 grader kalles supplementvinkler.

> $'\sin(\pi - v)' = \sin(\pi - v)$

$$\sin(\pi - v) = \sin(v)$$

> $'\cos(\pi - v)' = \cos(\pi - v)$

$$\cos(\pi - v) = -\cos(v)$$

> $'\tan(\pi - v)' = \tan(\pi - v)$

$$\tan(\pi - v) = -\tan(v)$$

Sammenhengen mellom sinus og cosinus er

> $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = \mathit{simplify}(\sin(x)^2 + \cos(x)^2)$

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

Sinus, cosinus og tangens til negative vinkler kan uttrykkes ved

> $'\sin(-v)' = \sin(-v)$

$$\sin(-v) = -\sin(v)$$

> $'\cos(-v)' = \cos(-v)$

$$\cos(-v) = \cos(v)$$

> $'\tan(-v)' = \tan(-v)$

$$\tan(-v) = -\tan(v)$$

Sinus, cosinus og tangens til en sum eller en differens av to vinkler kan uttrykkes ved

> $'\sin(u + v)' = \mathit{expand}(\sin(u + v))$

$$\sin(u + v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$$

> $'\sin(u - v)' = \mathit{expand}(\sin(u - v))$

$$\sin(u - v) = \sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v)$$

> $'\cos(u + v)' = \mathit{expand}(\cos(u + v))$

$$\cos(u + v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$$

> $'\cos(u - v)' = \mathit{expand}(\cos(u - v))$

$$\cos(u - v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$$

> $'\tan(u + v)' = \mathit{expand}(\tan(u + v))$

$$\tan(u + v) = \frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u)\tan(v)}$$

> $'\tan(u - v)' = \mathit{expand}(\tan(u - v))$

$$\tan(u - v) = \frac{-\tan(v) + \tan(u)}{1 + \tan(u)\tan(v)}$$

sinus, cosinus og tangens til 30º, 45º, 60º og 90º er.

> $T := \left[\left["\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)" = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), "\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)" = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), "\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)" = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right], \left["\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)" = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), "\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)" = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), "\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)" = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right], \left["\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)" = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),\right.\right.$

$$"\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)" = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), "\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)" = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\Bigg], \Bigg["\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)" = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), "\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)"$$
$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right), ``\Bigg]\Bigg]:$$

> *Matrix*(*T*)

$$\begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots \\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 & \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} & \dots \end{bmatrix}$$

Vi kan få Maple til å utrykke *tangens* ved hjelp av *sinus* og *cosinus* ved

- convert(*tan*(*v*),*sincos*) uttrykker $\tan(v)$ ved hjelp av $\sin(v)$ og $\cos(v)$

> $\tan(v) = convert(\tan(v), sincos)$

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$$

Eksempel 2.4.1

Gjør uttrykket $\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)$ enklere.

Løsning

> $g := \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right):$

> $g = expand(g)$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)$$

Mellomregning

> $\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = expand\left(\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\cos(x)\sqrt{3}}{2}$$

> $\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = expand\left(\cos\left(x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos(x)\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin(x)}{2}$$

2.5 Å løse likninger av typen sin *x* = *a*, cos *x* = *a*, tan *x* =*a*

Når Maple løser en trigonometrisk ligning, får vi normalt kun én løsning uttrykt i radianer. Vi kan fortelle Maple at vi ønsker alle løsningene. Omgjøring fra radianer til grader må vi gjøre selv.

- _EnvAllSolutions:= **true**; gir oss alle løsningene

> $restart:$
> $lign := \sin(x) = a : \%$

$$\sin(x) = a$$

> $solve(lign, \{x\})$

$$\{x = \arcsin(a)\}$$

Eksempel 2.5.1

Uttrykk i grader alle vinkler x som er slik at $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Løsning

> $lign := \cos(x) = -\frac{1}{2} : \%$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

> $solve(lign, \{x\})$

$$\left\{x = \frac{2\pi}{3}\right\}$$

> $solve([lign, 0 < x, x < 2\pi], x)$

$$\left\{x = \frac{2\pi}{3}\right\}$$

Her får vi bare vinkelen i 1. kvadrant. Med LøsLigning i vgs-pakken får vi begge løsningene.

> $LøsLigning([lign, 0 < x, x \leq 2\pi], x)$

$$\left\{x = \frac{2\pi}{3}\right\}, \left\{x = \frac{4\pi}{3}\right\}$$

> $LøsLigning\left(\left[Cos(x) = -\frac{1}{2}, 0 < x, x \leq 360\right], x\right)$

$$\{x = 120\}, \{x = 240\}$$

Eksempel 2.5.2

Løs ligningen $3\tan(x) + 2 = -3$.

Løsning

> *restart* :

> *lign* := $3\tan(x)+2=-3$: %

$$3\tan(x)+2=-3$$

> *solve*(*lign*, {*x*})

$$\left\{x=-\arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{x=-1.030376827\}$$

> $2\cdot\pi-1.030376827$

$$5.252808481$$

> *LøsLigning*(*lign*, *x*)

$$\left\{x=-\arctan\left(\frac{5}{3}\right)+\pi\_Z2\right\}$$

>

> *LøsLigning*([*lign*, $0<x, x\leq 2\pi$], *x*)

$$\left\{x=-\arctan\left(\frac{5}{3}\right)+\pi\right\}, \left\{x=-\arctan\left(\frac{5}{3}\right)+2\pi\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{x=2.111215827\}, \{x=5.252808481\}$$

_Z2 = 1, 2, 3, ...

>

2.6 Cosinussetningen

Cosinussetningen er gitt ved $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos(A)$
der A er motstående vinkel til siden a.

> *restart* :

Eksempel 2.6.1

Sidene i en trekant er 5, 4 og 8 lengdeenheter.
Regn ut vinklene.

Løsning

Vi regner først ut vinkel A.

> *csetn* := $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos(A)$: %

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos(A)$$

> *subs*($a=5, b=4, c=8$, *csetn*)

$$25=80-64\cos(A)$$

> *solve*(%, {*A*})

$$\left\{A=\arccos\left(\frac{55}{64}\right)\right\}$$

Da blir vinkelen

> $A=\dfrac{\arccos\left(\frac{55}{64}\right)\cdot 180}{\text{Pi}}$

$$A=\frac{180\arccos\left(\frac{55}{64}\right)}{\pi}$$

> *evalf*(%)

$$A=30.75351980$$

> $vA := 30.75351980 :$

Vinkel B finnes på tilsvarende måte.

> $csetn := b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos(B) : \%$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos(B)$$

> $subs(a=5, b=4, c=8, csetn)$

$$16 = 89 - 80\cos(B)$$

> $solve(\%, \{B\})$

$$\left\{B = \arccos\left(\frac{73}{80}\right)\right\}$$

Da blir vinkelen

> $B = \dfrac{\arccos\left(\frac{73}{80}\right)\cdot 180}{\mathrm{Pi}}$

$$B = \frac{180\arccos\left(\frac{73}{80}\right)}{\pi}$$

> $evalf(\%)$

$$B = 24.14684799$$

Vinkel C blir da

> $C = 180 - (vA + rhs(\%))$

$$C = 125.0996322$$

2.7 Sinussetningen

Sinussetningen er gitt ved $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin c}{c}$

Eksempel 2.7.3

I en trekant er $\angle\, A = 50°$, $\angle\, B = 35°$ og $c = 8$

Finn sidene a og b og $\angle\, C$.

Løsning

Vinkel C blir.

> $C := 180 - (50 + 35)$

$$C := 95$$

a og b fåes ved sinussetningen.

> $\dfrac{\sin\left(\frac{50}{180}\mathrm{Pi}\right)}{a} = \dfrac{\sin\left(\frac{C}{180}\mathrm{Pi}\right)}{8}$

$$\frac{\sin\left(\frac{5\,\pi}{18}\right)}{a} = \frac{\sin\left(\frac{17\,\pi}{36}\right)}{8}$$

> $solve(\%, \{a\})$

$$\left\{a = \frac{8\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{17\pi}{36}\right)}\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{a = 6.151764867\}$$

> $\frac{\sin\left(\frac{35}{180}\,\mathrm{Pi}\right)}{b} = \frac{\sin\left(\frac{C}{180}\,\mathrm{Pi}\right)}{8}$

$$\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{36}\right)}{b} = \frac{\sin\left(\frac{17\pi}{36}\right)}{8}$$

> *solve*(%, {*b*})

$$\left\{b = \frac{8\sin\left(\frac{7\pi}{36}\right)}{\sin\left(\frac{17\pi}{36}\right)}\right\}$$

> *evalf*(%)

$$\{b = 4.606139242\}$$

>